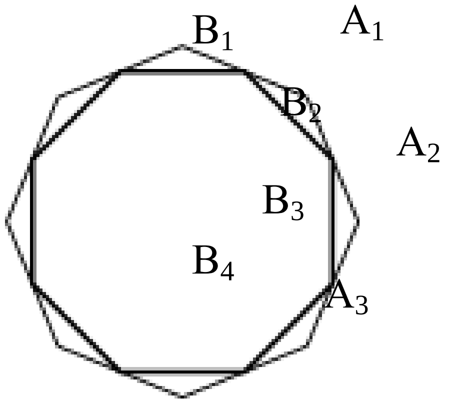
25.

а) Дан правильный восьмиугольник. Докажите, что если последовательно соединить отрезками середины его сторон, то получится правильный восьмиугольник.



Решение.

Выпуклый многоугольник называется правильным, если его стороны равны и все его углы равны.

Полученный многоугольник также является восьмиугольником (обозначим его вершины B_1, B_2, … B_8). Его стороны будут равны как соответствующие элементы равных равнобедренных треугольников $B_1A_1B_2$, $B_2A_2B_3$ …

Эти треугольники равны по 1 признаку равенства треугольников (его углы при вершинах A_1, A_2,… равны , а стороны равны половинам равных сторон исходного правильного многоугольника.

Покажем, что и углы восьмиугольника будут равны.

$\angle B_1B_2B_3=180^0-(\angle A_1B_2B_1+\angle A_2B_2B_3)$,

$\angle B_2B_3B_4=180^0-(\angle A_2B_3B_2+\angle A_3B_3B_4)$ и так далее.

Но поскольку равнобедренные треугольники с вершинами в точках A_1, A_2, A_3… равны, то и углы при основаниях этих треугольников равны:

$\angle A_1B_2B_1=\angle A_2B_2B_3=\angle A_2B_3B_2=\angle A_3B_3B_4=\ldots$

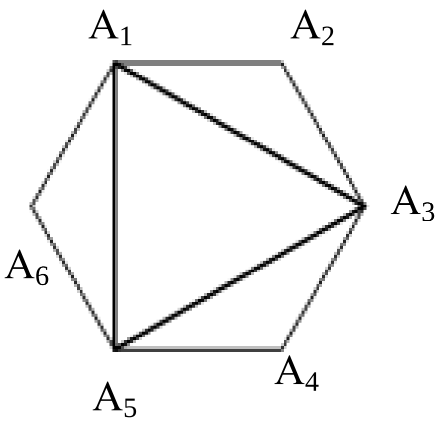
Получаем, что $\angle B_1B_2B_3=\angle B_2B_3B_4=\ldots$

Стороны и углы полученного восьмиугольника равны друг другу,

следовательно, многоугольник правильный. Что и требовалось доказать.

б) Дан правильный шестиугольник. Докажите, что если его вершины последовательно соединить отрезками через одну, то получится равносторонний треугольник.

Решение.



Выпуклый многоугольник называется правильным, если его стороны равны и все его углы равны.

Полученный многоугольник также является треугольником. Его стороны будут равны как соответствующие элементы равных равнобедренных треугольников $A_1A_2A_3$, $A_3A_4A_5$, , $A_5A_6A_1$.

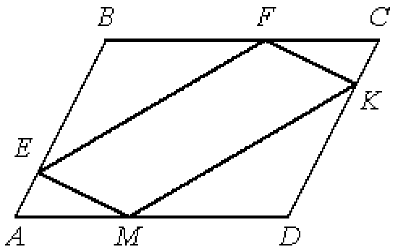
Эти треугольники равны по 1 признаку равенства треугольников (его углы при вершинах A_2, A_4 и A_6 равны , а стороны равны половинам равных сторон исходного правильного многоугольника.

Получаем, что треугольник $A_1A_3A_5$ равносторонний, следовательно,

треугольник правильный. Что и требовалось доказать.

в) В параллелограмме ABCD точки E, F.K и M лежат на сторонах, как показано на рисунке, причём CF=AM, BE=DK. Докажите, что EFKM – параллелограмм.

Решение.



Противоположные углы и стороны параллелограмма равны. СК= CD -КD = =AB-BE=AE. Треугольники CFK и AME равны по первому признаку равенства треугольников:

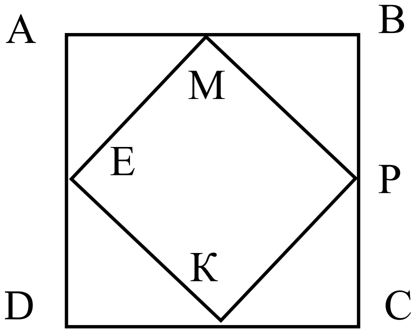
∠FCK=∠MAE, CF=AM (по условию), СК=AE (по доказанному).

Аналогично доказывается равенство треугольников BEF и DKM.

Получим, что в четырёхугольнике EFKM противоположные стороны попарно равны, следовательно, EFKM – параллелограмм.

г) Докажите, что если последовательно соединить середины сторон правильного четырёхугольника, то также будет получен правильный четырёхугольник.

Решение.



Выпуклый многоугольник называется правильным, если его стороны равны и все его углы равны.

Правильный четырёхугольник является квадратом. Треугольники EAM, MBP, PCK, KDE равны по 1 признаку равенства треугольников (прямоугольные треугольники с катетами, равными половинам сторон исходного квадрата). Стороны четырёхугольника MEPK равны как соответствующие элементы равных треугольников.

Покажем, что углы MEPK равны друг другу. Поскольку равнобедренные прямоугольные треугольники имеют острые углы, равные 45°, то

$\angle EMP = 180^0 - (\angle AME + \angle BMP) = 180^0 - (45^0 + 45^0) = 90^0$.

Аналогично $\angle MPK = \angle PKE = \angle KEM = 90^0$. Получаем, что четырёхугольник MPKE – правильный.