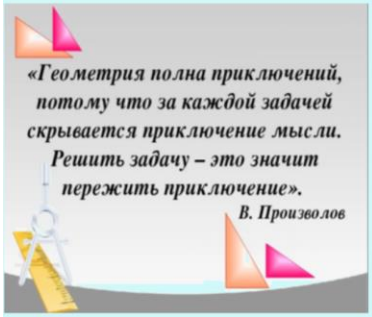
ПОДГОТОВКА К РЕШЕНИЮ СЛОЖНЫХ ПЛАНИМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ. РЕШЕНИЕ ИЗБРАННЫХ ЗАДАЧ

Докладчик: ***Казаров Бениамин Агопович*** - *кандидат физико-математических наук, доцент, профессор РАЕ, заслуженный работник науки и образования РАЕ, Почетный доктор наук (Doctor of science, honoris causa, International Academy of natural history)*

Основу подготовки составляет учебно-методическое пособие Р.К. Гордина "Геометрия. Планиметрия"



...Геометрия является самым могущественным средством для тренировки наших умственных способностей и даёт нам возможность правильно мыслить и рассуждать.

Галилео Галилей (1564-1642 г.г., итальянский физик, астроном, философ, математик)

Дополняем подготовку решением задач 16 ЕГЭ прошлых лет + варианты А.А. Ларина (alexlarin.net)

ПРИМЕРНЫЕ ТЕМЫ КУРСА "СЛОЖНАЯ ПЛАНИМЕТРИЯ"

Тема 1. Медиана прямоугольного и произвольного треугольников. Удвоение медианы

Тема 2. Четырехугольники. Параллелограмм

Тема 3. Четырехугольники. Трапеция

Тема 4. Биссектрисы треугольника

Тема 5. Подобие треугольников. Отношение отрезков

Тема 6. Отношение площадей. Метод площадей

Тема 7. Касательная к окружности

Тема 8. Касающиеся окружности. Внешнее и внутреннее касания

Тема 9. Пересекающиеся окружности

Тема 10. Окружности, связанные с треугольником и четырехугольником

Тема 11. Пропорциональные отрезки в окружности

Тема 12. Метод вспомогательной окружности. Свойства ортоцентра

Тема 1. Медиана прямоугольного и произвольного треугольников. Удвоение медианы

Полезные факты

1. *Теорема о медианах. Медианы треугольника пересекаются в одной точке и делятся этой точкой в отношении 2 : 1, считая от вершины.*
2. *Теорема: Медиана прямоугольного треугольника, проведенная к гипотенузе, равна половине гипотенузы*
3. *Теорема (обратная - признак прямоугольного треугольника). Если медиана треугольника равна половине стороны, к которой она проведена, то треугольник прямоугольный.*
4. *Медиана разбивает треугольник на два равновеликих*
5. *Три медианы разбивают треугольник на шесть равновеликих*
6. *Если площадь треугольника равна S, то площадь треугольника, составленного из его медиан* $\frac{3}{4}S$

Тема 2. Четырехугольники. Параллелограмм

Полезные факты

1. *Теорема Вариньона: Середины сторон любого четырехугольника являются вершинами параллелограмма. Площадь этого параллелограмма вдвое меньше площади четырехугольника, а периметр параллелограмма равен сумме длин диагоналей исходного четырехугольника*
2. *Сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов всех его сторон:*

$$d_1^2 + d_1^2 = 2(a^2 + b^2)$$

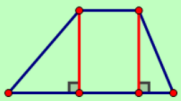
3. *Если окружность вписана в угол, то ее центр лежит на биссектрисе этого угла*

Тема 3. Четырехугольники. Трапеция

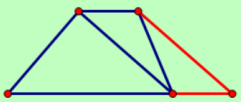
Полезные факты

1. *Замечательное свойство трапеции: Точка пересечения диагоналей любой трапеции, точка пересечения продолжений боковых сторон и середины оснований лежат на одной прямой*
2. *Базовые дополнительные построения:*

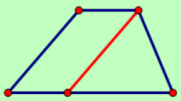
- проведение высот из концов одного основания на другое



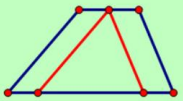
- через вершину меньшего основания провести отрезок параллельно диагонали



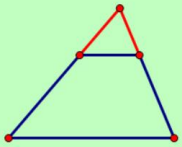
- проведение через вершины трапеции прямой, параллельной боковой стороне, не содержащей эту вершину



- проведение через середину меньшего основания прямых, параллельных боковым сторонам

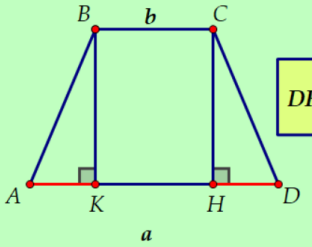


- продление боковых сторон до их пересечения

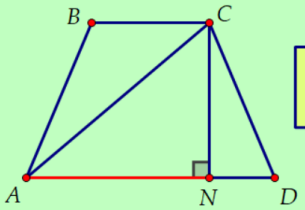


3. Отрезок, соединяющий середины диагоналей трапеции, равен полуразности оснований

4. Проекция боковой стороны равнобедренной трапеции на основание равна полуразности оснований, а проекция диагонали - полусумме оснований

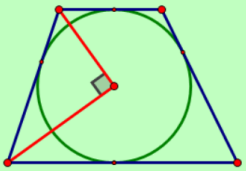


$$DH = AK = \frac{a - b}{2}$$

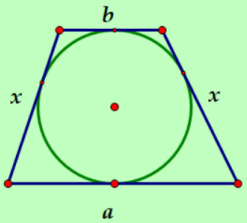


$$AN = \frac{a + b}{2}$$

5. Если в трапецию можно вписать окружность, то боковая сторона видна из центра окружности под прямым углом



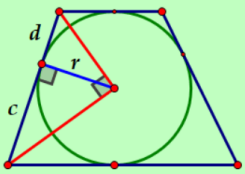
5. Если окружность вписана в равнобедренную трапецию, то боковая сторона трапеции равна ее средней линии



$$2x = a + b$$

$$x = \frac{a + b}{2}$$

6. Если в трапецию можно вписать окружность, то радиус окружности есть среднее пропорциональное (среднее геометрическое) отрезков, на которые точка касания делит боковую сторону.

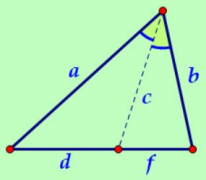


$$r = \sqrt{cd}$$

Тема 4. Биссектрисы треугольника

Полезные факты

1. *Свойство биссектрисы: Биссектриса треугольника делит его сторону на отрезки, пропорциональные прилежащим сторонам*
2. *Если точка равноудалена от сторон угла, то она лежит на его биссектрисе (верно и обратное)*
3. *Биссектрисы смежных углов перпендикулярны; биссектрисы внутренних односторонних углов при двух параллельных прямых и секущей перпендикулярны*
4. *Квадрат биссектрисы треугольника равен произведению сторон, ее заключающих, без произведения отрезков третьей стороны, на которые она разделена биссектрисой*



$c^2 = a \cdot b - d \cdot f$

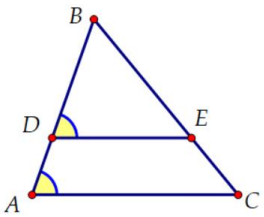
5. *Центр вписанной окружности треугольника - точка пересечения биссектрис треугольника*

Тема 5. Подобие треугольников. Отношение отрезков

Полезные факты

Типичные случаи подобия треугольников

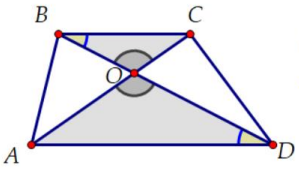
1. Параллельный отрезок в треугольнике



$DE \parallel AC$

$\Delta DBE \sim \Delta ABC$

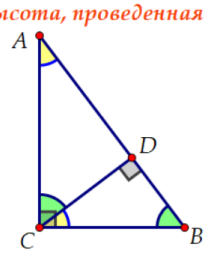
2. "Песочные часы" ("рюмочки")



$BC \parallel AD$

$\Delta BOC \sim \Delta DOA$

3. Высота, проведенная к гипотенузе

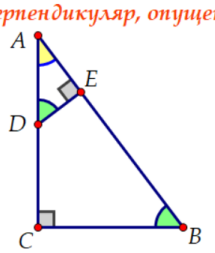


$\Delta ACD \sim \Delta CBD$

$\Delta ACD \sim \Delta ABC$

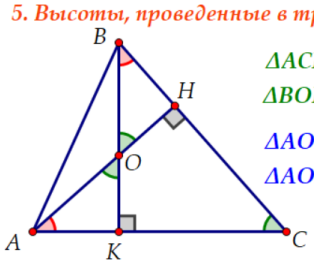
$\Delta CBD \sim \Delta ABC$

4. Перпендикуляр, опущенный на гипотенузу



$\Delta ADE \sim \Delta ABC$

5. Высоты, проведенные в треугольнике I



$\Delta ACH \sim \Delta BCK$

$\Delta BOH \sim \Delta BCK$

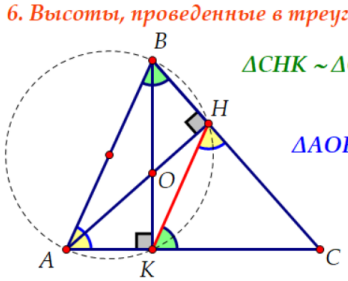
$\Delta ACH \sim \Delta BOH$

$\Delta AOK \sim \Delta BOH$

$\Delta AOK \sim \Delta ACH$

$\Delta BOH \sim \Delta ACH$

6. Высоты, проведенные в треугольнике II



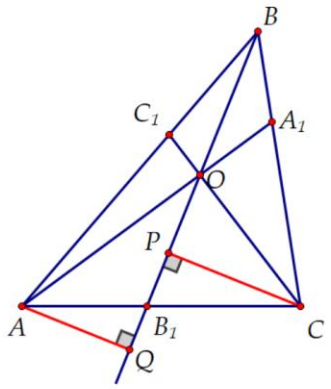
$\Delta CHK \sim \Delta CAB$

$k = \dfrac{CH}{AC} = |\cos C|$

$\Delta AOB \sim \Delta KOH$

2. Теорема Чевы.

Пусть на сторонах AB, BC и AC треугольника ABC взяты соответственно точки C_1, A_1 и B_1. Прямые AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда выполняется равенство:



$$\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=1 \quad (*)$$

Доказательство:

$AQ \perp BB_1$, $CP \perp BB_1$

$S_{\Delta AOB} = 0{,}5\cdot OB\cdot AQ$; $S_{\Delta BOC} = 0{,}5\cdot OB\cdot CP$; $\frac{S_{\Delta AOB}}{S_{\Delta BOC}} = \frac{AQ}{CP}$ (1)

$\Delta AQB_1 \sim \Delta CPB_1 \Rightarrow \frac{AQ}{CP} = \frac{B_1A}{CB_1}$ (2)

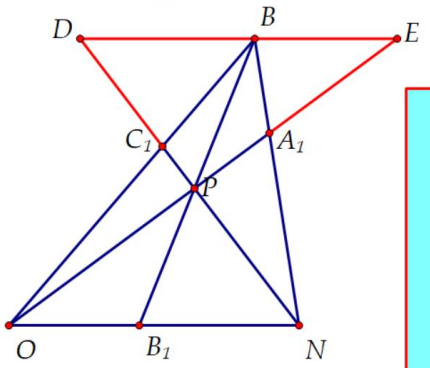
Из (1) и (2) следует: $\frac{S_{\Delta AOB}}{S_{\Delta BOC}} = \frac{B_1A}{CB_1}$ (3) Аналогично: $\frac{S_{\Delta AOC}}{S_{\Delta BOC}} = \frac{AC_1}{C_1B}$ (4)

$\frac{S_{\Delta AOB}}{S_{\Delta AOC}} = \frac{BA_1}{A_1C}$ (5)

Подставим (3), (4) и (5) в равенство (*): $\frac{S_{\Delta AOC}}{S_{\Delta BOC}}\cdot\frac{S_{\Delta AOB}}{S_{\Delta AOC}}\cdot\frac{S_{\Delta BOC}}{S_{\Delta AOB}} = 1;\ 1 = 1$ (верно)

3. Теорема Ван-Обеля.

Пусть на сторонах AB, BC и AC треугольника ABC взяты соответственно точки C_1, A_1 и B_1. Если прямые AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в одной точке, то имеет место равенство:



$$\frac{BO}{OB_1} = \frac{BA_1}{A_1C} + \frac{BC_1}{C_1A}$$

Доказательство:

$DE \parallel AC$

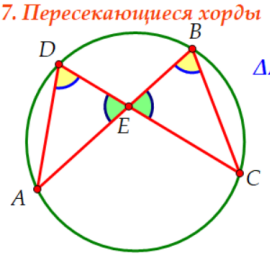
$\Delta AOC \sim \Delta DOE \Rightarrow \frac{BO}{OB_1} = \frac{DE}{AC} = \frac{DB+BE}{AC} = \frac{DB}{AC} + \frac{BE}{AC}$ (1)

$\Delta EBA_1 \sim \Delta ACA_1 \Rightarrow \frac{BE}{AC} = \frac{BA_1}{A_1C}$ (2)

$\Delta BDC_1 \sim \Delta ACC_1 \Rightarrow \frac{DB}{AC} = \frac{BC_1}{C_1A}$ (3)

Подставив (2) и (3) в (1), получим: $\frac{BO}{OB_1} = \frac{BA_1}{A_1C} + \frac{BC_1}{C_1A}$

7. Пересекающиеся хорды

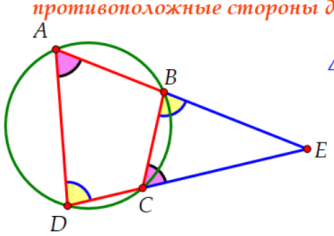


$\Delta ADE \sim \Delta CBE \Rightarrow \frac{AE}{CE} = \frac{DE}{BE}$

$AE\cdot BE = DE\cdot CE$

теорема об отрезках пересекающихся хорд

8. Четырехугольник вписан в окружность - продлим противоположные стороны до их пересечения

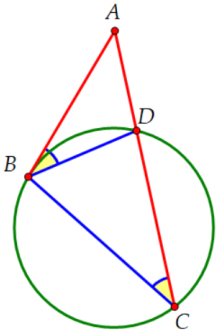


$\Delta BEC \sim \Delta DEA \Rightarrow \frac{BE}{DE} = \frac{CE}{AE}$

$AE\cdot BE = DE\cdot CE$

теорема о секущих

9. Касательная и секущая



AB - касательная, AC - секущая

$\Delta ABD \sim \Delta ACB \Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{AD}{AB}$

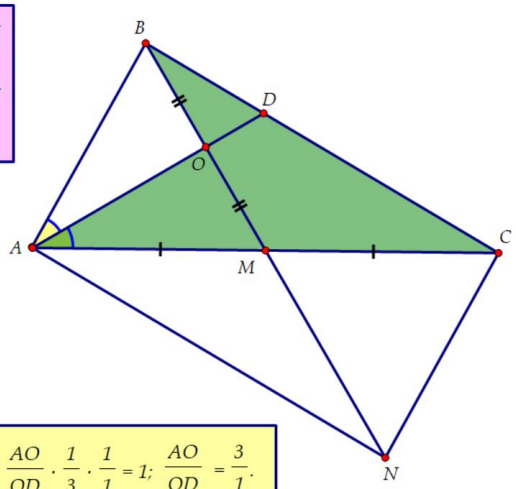
$AB^2 = AD\cdot AC$

теорема о касательной и секущей

6.26.1. Биссектриса AD треугольника ABC делит его медиану BM пополам.

а) Докажите, что площадь треугольника ACD вдвое больше площади треугольника ABD.

б) В каком отношении медиана BM делит биссектрису AD?



а) $\frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AC}$ (свойство биссектрисы)

AO - биссектриса и медиана $\Delta ABM \Rightarrow \Delta ABM$ равнобедренный

$AB = AM = \frac{1}{2}AC;\ \frac{BD}{CD} = \frac{1}{2};\ \frac{S_{\Delta ABD}}{S_{\Delta ACD}} = \frac{BD}{CD} = \frac{1}{2}$

б) На продолжении медианы BM за точку M отложим отрезок $MN = BM$

$ABCN$ - параллелограмм $\Rightarrow AN = BC$

$\Delta BOD \sim \Delta NOA$ (по двум углам): $AO : OD = AN : BD = BC : BD = 3 : 1$

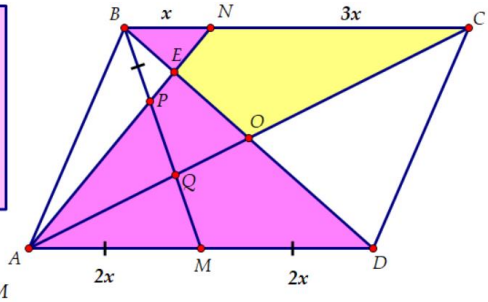
2 способ. По теореме Менелая для ΔACD и секущей MB: $\frac{AO}{OD} \cdot \frac{DB}{BC} \cdot \frac{CM}{AM} = 1;\ \frac{AO}{OD} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1} = 1;\ \frac{AO}{OD} = \frac{3}{1}$.

Ответ: б) 3 : 1

6.28.1. На сторонах AD и BC параллелограмма $ABCD$ взяты соответственно точки M и N, причём M — середина AD, а $BN : NC = 1 : 3$.

а) Докажите, что прямые AN и AC делят отрезок BM на три равные части.

б) Найдите площадь четырёхугольника, образованного пересечениями прямых AN, AC, BD и BC, если площадь параллелограмма $ABCD$ равна 40.



а) O - середина $BD \Rightarrow Q$ - точка пересечения медиан $\Delta ABD \Rightarrow QM = \frac{1}{3}BM$

$\Delta BPN \sim \Delta MPA$ (по двум углам) $\Rightarrow \frac{BP}{PM} = \frac{BN}{AM} = \frac{1}{2} \Rightarrow BP = \frac{1}{3}BM \Rightarrow PQ = \frac{1}{3}BM$

Таким образом, $BP = PQ = QM$

б) $\Delta BEN \sim \Delta DEA$ (по двум углам) $\Rightarrow \frac{BE}{DE} = \frac{BN}{AD} = \frac{1}{4} \Rightarrow BE = y,\ DE = 4y,\ BD = 5y;\ BO = 2{,}5y$

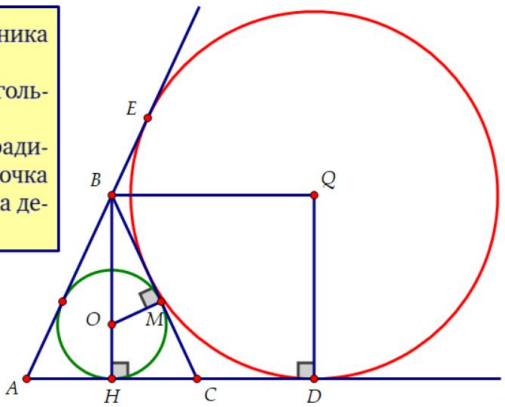
$$\frac{S_{\Delta BEN}}{S_{\Delta BOC}} = \frac{0{,}5 \cdot BE \cdot BN \cdot \sin\angle NBE}{0{,}5 \cdot BO \cdot BC \cdot \sin\angle NBE} = \frac{y \cdot x}{2{,}5y \cdot 4x} = \frac{1}{10} \Rightarrow S_{OENC} = \frac{9}{10}S_{\Delta BOC} = \frac{9}{10} \cdot \frac{1}{4} \cdot S_{\Delta ABCD} = 9$$

Ответ: б) 9

6.31.1. Вневписанная окружность равнобедренного треугольника касается его боковой стороны.

а) Докажите, что радиус этой окружности равен высоте треугольника, опущенной на основание.

б) Известно, что радиус этой окружности в пять раз больше радиуса вписанной окружности треугольника. В каком отношении точка касания вписанной окружности с боковой стороной треугольника делит эту сторону?



а) BH - высота, медиана и биссектриса равнобедр. ΔABC

Окружность с центром Q вписана в $\angle CBE \Rightarrow BQ$ - биссектриса $\angle CBE$

$\angle QBH = 90°$ (угол между биссектрисами смежных углов)

$\angle QDH = 90°$ (QD - радиус, проведенный в точку касания)

$\Rightarrow BQDH$ - прямоугольник, $BH = QD$

б) Пусть r - радиус окружности, вписанной в ΔABC, тогда $5r$ - радиус вневписанной окружности

$BH = QD = 5r;\ OB = BH - OH = 5r - r = 4r.$ Из ΔBOM: $BM = \sqrt{16r^2 - r^2} = r\sqrt{15}$

$\Delta BOM \sim \Delta BCH \Rightarrow \frac{BM}{BH} = \frac{OM}{CH};\ CH = \frac{BH \cdot OM}{BM} = \frac{5r \cdot r}{r\sqrt{15}} = \frac{r\sqrt{15}}{3}$

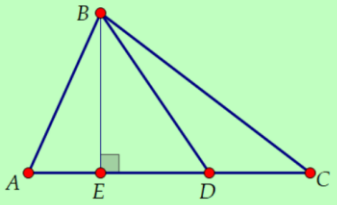
$CH = CM$ (как отрезки касательных) $\Rightarrow \frac{CM}{BM} = \frac{r\sqrt{15}}{3 \cdot r\sqrt{15}} = 1 : 3$

Ответ: б) 1 : 3

Тема 6. Отношение площадей. Метод площадей

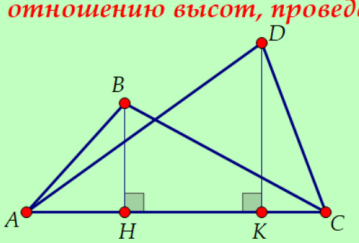
Полезные факты

1. *Если два треугольника имеют равные высоты, то отношение их площадей равно отношению длин оснований (сторон, на которые опущены эти высоты)*



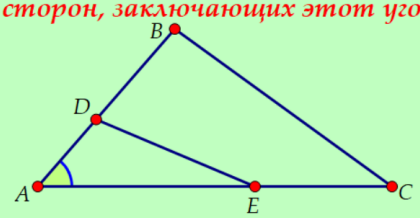
$$\frac{S_{\Delta ABD}}{S_{\Delta CBD}} = \frac{AD}{CD}$$

2. *Если два треугольника имеют одинаковое основание, то отношение их площадей равно отношению высот, проведенных к этому основанию:*



$$\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta ADC}} = \frac{BH}{DK}$$

3. *Площади треугольников, имеющих равный угол, относятся как произведения сторон, заключающих этот угол*



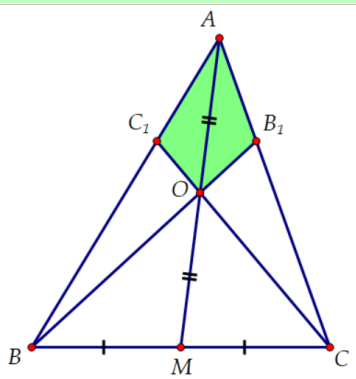
$$\frac{S_{\Delta ADE}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{AD}{AB} \cdot \frac{AE}{AC}$$

4. *Отношение площадей подобных треугольников равно квадрату коэффициента подобия*

7.34.1. Точки B_1 и C_1 лежат на сторонах соответственно AC и AB треугольника ABC, причём $AB_1 : B_1C = AC_1 : C_1B$. Прямые BB_1 и CC_1 пересекаются в точке O.

а) Докажите, что прямая AO делит пополам сторону BC.

б) Найдите отношение площади четырёхугольника AB_1OC_1 к площади треугольника ABC, если $AB_1 : B_1C = AC_1 : C_1B = 1 : 2$.



а) По теореме Менелая для ΔACM и секущей BB_1: $\boxed{\frac{AB_1}{B_1C} \cdot \frac{CB}{BM} \cdot \frac{MO}{OA} = 1}$ (1)

По теореме Менелая для ΔABM и секущей CC_1: $\boxed{\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{CB}{CM} \cdot \frac{MO}{OA} = 1}$ (2)

Разделив (1) на (2), получим: $\frac{CM}{BM} = 1 \Rightarrow CM = BM$

б) Из (1) следует: $\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{1} \cdot \frac{MO}{OA} = 1 \Rightarrow MO = OA \Rightarrow BO$ *- медиана* ΔABM

$$\frac{S_{\Delta AC_1O}}{S_{\Delta AOB}} = \frac{AC_1}{AB} = \frac{1}{3} \Rightarrow S_{\Delta AC_1O} = \frac{1}{3} S_{\Delta AOB} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} S_{\Delta ABM} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} S_{\Delta ABM} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} S_{\Delta ABC} = \frac{1}{12} S_{\Delta ABC}$$

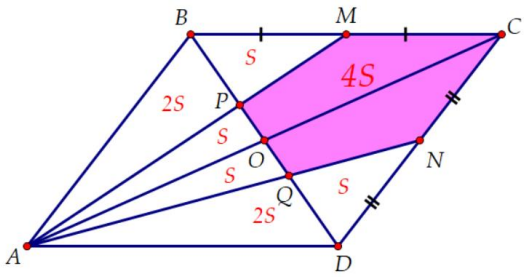
Аналогично: $S_{\Delta AB_1O} = \frac{1}{12} S_{\Delta ABC}$; $S_{\Delta AB_1OC_1} = S_{\Delta AC_1O} + S_{\Delta AB_1O} = \frac{1}{6} S_{\Delta ABC} \Rightarrow \frac{S_{\Delta AB_1OC_1}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{1}{6}$.

***Ответ:* б) 1 : 6**

7.36.1. На диагонали BD параллелограмма $ABCD$ отмечены точки P и Q, причём $BP = PQ = QD$.

а) Докажите, что прямые AP и AQ проходят через середины M и N сторон BC и CD соответственно.

б) Найдите отношение площади пятиугольника $CMPQN$ к площади параллелограмма $ABCD$.



а) $\Delta MPB \sim \Delta APD$ (по двум углам) $\Rightarrow \dfrac{BM}{AD} = \dfrac{PB}{PD} = \dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow BM = \dfrac{1}{2}AD = \dfrac{1}{2}BC \Rightarrow M$ - середина BC

Аналогично из подобия ΔDQN и ΔBQA: $DN = \dfrac{1}{2}CD \Rightarrow N$ - середина DC

б) Пусть $S_{\Delta BPM} = S$; P - точка пересечения медиан ΔABC; $S_{\Delta ABP} : S_{\Delta BPM} = AP : PM = 2 : 1 \Rightarrow S_{\Delta ABP} = 2S$;

$S_{\Delta ABP} : S_{\Delta APO} = BP : PO = 2 : 1 \Rightarrow S_{\Delta APO} = S$; $PO = \dfrac{1}{3}BO$; $OQ = \dfrac{1}{3}DO = \dfrac{1}{3}BO \Rightarrow PO = OQ \Rightarrow S_{\Delta AOQ} = S_{\Delta APO} = S$

$S_{\Delta AQD} : S_{\Delta AOQ} = QD : QO = 2 : 1 \Rightarrow S_{\Delta AQD} = 2S$; $S_{\Delta NQD} : S_{\Delta AQD} = QN : AQ = 1 : 2 \Rightarrow S_{\Delta NQD} = S$; $S_{CMPQN} = S_{\Delta BCD} - 2S = 6S - 2S = 4S$;

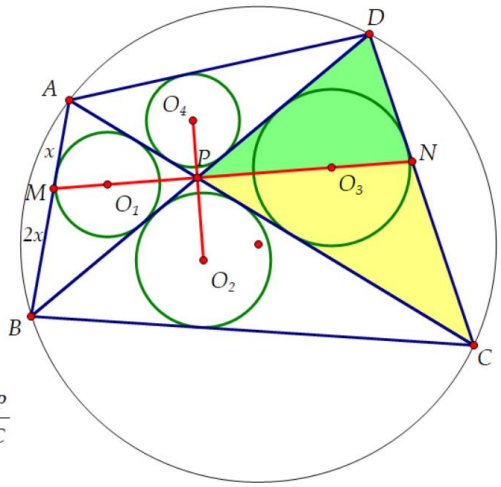
$$\frac{S_{CMPQN}}{S_{ABCD}} = \frac{4S}{12S} = \frac{1}{3}.$$

Ответ: б) 1 : 3

7.43.1. Диагонали выпуклого четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке P. В треугольники APB, BPC, CPD и APD вписаны окружности с центрами O_1, O_2, O_3 и O_4 соответственно.

а) Докажите, что прямые O_1O_3 и O_2O_4 перпендикулярны.

б) Пусть прямая O_1O_3 пересекает стороны AB и CD в точках M и N соответственно. Найдите отношение площадей треугольников CPN и DPN, если около четырёхугольника $ABCD$ можно описать окружность и $AM : MB = 1 : 2$.



а) O_1 - точка пересечения биссектрис ΔABP

Так как биссектрисы вертикальных углов лежат на одной прямой, то прямые O_1O_3 и O_2O_4 пересекаются в точке P.

$\angle O_1PO_4 = 90°$ (угол между биссектрисами смежных углов)

б) По свойству биссектрисы: $\dfrac{AM}{MB} = \dfrac{AP}{PB}$ и $\dfrac{DN}{NC} = \dfrac{DP}{PC}$

По теореме об отрезках пересекающихся хорд: $AP \cdot PC = DP \cdot PB \Rightarrow \dfrac{AP}{PB} = \dfrac{DP}{PC}$

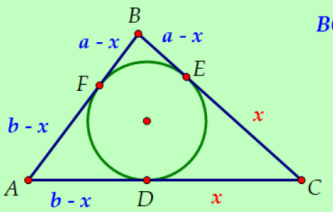
$\Rightarrow \dfrac{DN}{NC} = \dfrac{AM}{MB} = \dfrac{1}{2}$; $\boxed{\dfrac{S_{\Delta CPN}}{S_{\Delta DPN}} = \dfrac{NC}{DN} = \dfrac{2}{1}}$

Ответ: б) 2 : 1

Тема 7. Касательная к окружности

Полезные факты

***1. Теорема:** В любом треугольнике расстояние от вершины треугольника до точки касания вписанной окружности со стороной треугольника, выходящей из данной вершины, есть разность полупериметра треугольника и стороны, противолежащей данной вершине:*



$BC = a$, $AC = b$, $AB = c$ $\qquad CD = CE = x$

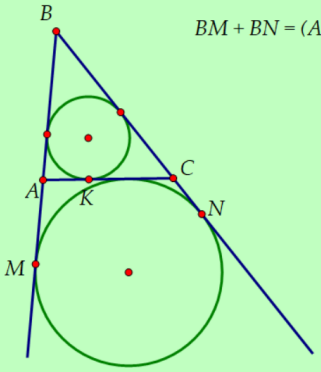
$c = a - x + b - x$

$2x = a + b - c$

$2x = a + b + c - 2c$ $\qquad x = \dfrac{a + b + c}{2} - c$

$\boxed{x = p - c}$

2. Теорема: В любом треугольнике расстояние от вершины треугольника до точки касания вневписанной окружности с продолжением стороны треугольника, выходящей из данной вершины, есть полупериметр треугольника:



$BM + BN = (AB + AM) + (BC + CN) = (AB + AK) + (BC + CK) = AB + AC + BC;$

$BM = BN$ (как отрезки касательных)

$2BM = P_{\Delta ABC}$

$\boxed{BM = p}$

3. Теорема об угле между касательной и хордой. Угол между касательной и хордой, проведенной через точку касания, равен половине угловой величины дуги, заключенной между ними

8.36.1. Окружность с центром O, вписанная в треугольник ABC, касается стороны BC в точке M. Окружность с центром O_1 касается стороны BC в точке N, а также касается продолжений сторон AC и AB.

а) Докажите, что около четырёхугольника $BOCO_1$ можно описать окружность.

б) Найдите площади четырёхугольников $BOCO_1$ и $NOMO_1$, если $AC = 6$, $BC = 8$, $AB = 10$.

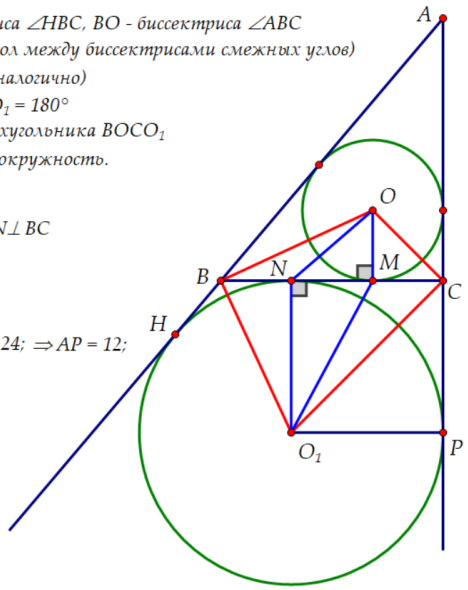
а) BO_1 - биссектриса $\angle HBC$, BO - биссектриса $\angle ABC$

$\angle OBO_1 = 90°$ (угол между биссектрисами смежных углов)

$\angle OCO_1 = 90°$ (аналогично)

$\angle OBO_1 + \angle OCO_1 = 180°$

$\Rightarrow$ около четырехугольника $BOCO_1$ можно описать окружность.



б) ΔABC прямоугольный, т.к. $AB^2 = AC^2 + BC^2$

Пусть r, r_1 - радиусы окружностей с центрами O и O_1 соответственно; $OM \perp BC$, $O_1N \perp BC$

$r = \dfrac{AC + BC - AB}{2} = \dfrac{6 + 8 - 10}{2} = 2$; $NCPO_1$ - квадрат $\Rightarrow CP = O_1N = r_1$

$BH = BN$, $CP = CN$, $AH = AP$ (как отрезки касательных)

$AH + AP = (AB + BH) + (AC + CP) = (AB + BN) + (AC + CN) = AB + AC + BC = 24$; $2AP = 24$; $\Rightarrow AP = 12$;

$CP = r_1 = AP - AC = 12 - 6 = 6$; $S_{BOCO_1} = S_{\Delta BOC} + S_{BO_1C} = 0{,}5BC(r + r_1) = 0{,}5 \cdot 8 \cdot 8 = 32$;

$NM = CN - CM = r_1 - r = 6 - 2 = 4$;

$S_{NOMO_1} = S_{\Delta NOM} + S_{NO_1M} = 0{,}5NM(r + r_1) = 0{,}5 \cdot 4 \cdot 8 = 16$.

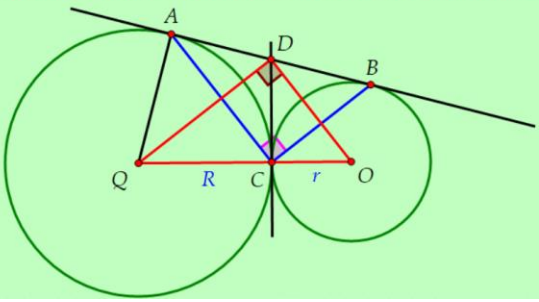
Ответ: б) 32 и 16.

Тема 8. Касающиеся окружности. Внешнее и внутреннее касания

Полезные факты

1. Линия центров двух касающихся окружностей проходит через точку касания

2. Если окружности с центрами O и Q касаются внешним образом в точке C, а прямая касается этих окружностей в различных точках A и B и пересекается с общей касательной, проведенной через точку C, в точке D, то $\angle ACB = 90°$ и $\angle QDO = 90°$ и $AB = 2\sqrt{Rr}$



CD - высота прямоугольного ΔQDO $\Rightarrow CD = \sqrt{Rr}$

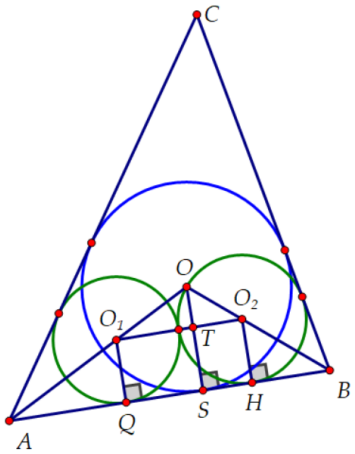
CD - медиана прямоугольного ΔACB, проведенная к гипотенузе

$AB = 2CD = 2\sqrt{Rr}$

9.52.1. В треугольник ABC помещены две касающиеся окружности с центрами O_1 и O_2, причём первая из них касается сторон AB и AC, а вторая — сторон AB и BC.

а) Докажите, что прямые AO_1 и BO_2 пересекаются в центре окружности, вписанной в треугольник ABC.

б) Найдите радиусы окружностей, если они равны, а $AB = AC = 10$ и $BC = 12$.



а) Так как окружность с центром O_1 вписана в $\angle CAB$, то AO_1 - биссектриса $\angle CAB$;

Аналогично: BO_2 - биссектриса $\angle ABC$

Значит, $AO_1 \cap BO_2 = O$, где O - центр окружности, вписанной в ΔABC

б) Пусть x - искомый радиус, r - радиус окружности, вписанной в ΔABC,

p - полупериметр ΔABC

$S_{\Delta ABC} = \sqrt{p(p - AB)^2(p - BC)} = \sqrt{16(16 - 10)^2(16 - 12)} = 48;\ \ S_{\Delta ABC} = pr \Rightarrow r = \dfrac{48}{16} = 3$

Окружности с центрами O_1 и O_2 равны и касаются $\Rightarrow O_1O_2 = 2x$

$QO_1 \perp AB$, $HO_2 \perp AB \Rightarrow HQO_1O_2$ - прямоугольник и $O_1O_2 \parallel AB$

$\Delta O_1OO_2 \sim \Delta AOB$ (по двум углам)

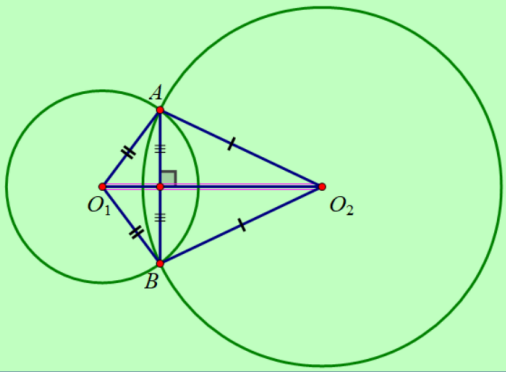
$OS \perp AB$, OS - высота ΔAOB; $OS \cap O_1O_2 = T$; $OS = r$, $OT = OS - TS = r - x = 3 - x$. Из подобия получим: $\dfrac{O_1O_2}{AB} = \dfrac{OT}{OS}$;

$\dfrac{2x}{10} = \dfrac{3 - x}{3};\ x = \dfrac{15}{8}$ **Ответ: б) $\dfrac{15}{8}$.**

Тема 9. Пересекающиеся окружности (1 - 2 занятия)

Полезные факты

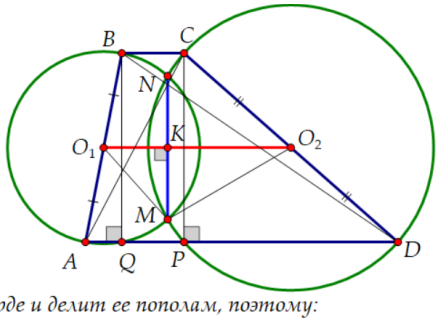
1. Линия центров двух пересекающихся окружностей перпендикулярна их общей хорде и делит ее пополам



10.20.1. Дана трапеция с основаниями AD и BC. Окружности, построенные на боковых сторонах AB и CD как на диаметрах, пересекаются в точках M и N.

а) Докажите, что $MN \perp AD$.

б) Найдите MN, если боковые стороны трапеции равны 12 и 16, а сумма проекций диагоналей на большее основание равна 20.



а) Пусть O_1 и O_2 середины диагоналей AB и CD соответственно, тогда

O_1 и O_2 - центры окружностей с диаметрами AB и CD.

O_1O_2 - средняя линия трапеции $\Rightarrow O_1O_2 \parallel AD$

Линия центров пересекающихся окружностей перпендикулярна их общей хорде и делит ее пополам, поэтому:

$MN \perp O_1O_2 \Rightarrow MN \perp AD$.

б) Пусть $BQ \perp AD$, $CP \perp AD$. Тогда AP - проекция AC на AD, DQ - проекция BD на AD.

По условию: $AP + DQ = 20$; $PQ = BC$, $AD = AP + DQ - PQ = AP + DQ - BC$; $AD + BC = AP + DQ = 20$; $O_1O_2 = \dfrac{AD + BC}{2} = 10$;

$MN = 2MK$; MK - высота ΔO_1MO_2; $O_1M = 0{,}5AB = 0{,}5 \cdot 12 = 6$; $O_2M = 0{,}5CD = 0{,}5 \cdot 16 = 8$;

$O_1M^2 + O_2M^2 = O_1O_2^2 \Rightarrow \Delta O_1MO_2$ прямоугольный, $\angle O_1MO_2 = 90°$.

$MK = \dfrac{O_1M \cdot O_2M}{O_1O_2} = \dfrac{6 \cdot 8}{10} = 4{,}8;\ MN = 2MK = 9{,}6.$

Ответ: б) 9,6

Тема 10. Окружности, связанные с треугольником и четырехугольником

Полезные факты

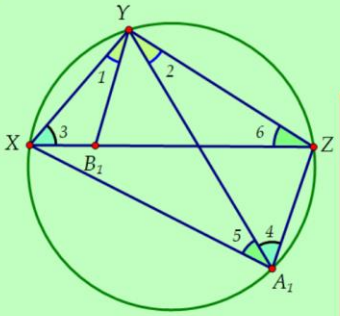
1. *Теорема:* Для того чтобы около четырехугольника можно было описать окружность, необходимо и достаточно, чтобы сумма его противоположных углов была равна 180°
2. *Теорема:* Для того чтобы в выпуклый четырехугольник можно было вписать окружность, необходимо и достаточно, чтобы суммы его противоположных сторон были равны

3. Если p - полупериметр треугольника, r - радиус его вписанной окружности, r_a - радиус вневписанной окружности треугольника, касающейся стороны a, то:

$$S_\Delta = pr \qquad S_\Delta = (p - a) \cdot r_a$$

4. *Теорема Птолемея.*

Произведение диагоналей вписанного четырехугольника равно сумме произведений его противоположных сторон:



$$\boxed{AC \cdot BD = AB \cdot CD + BC \cdot AD}$$

Доказательство:

1. На диагонали AC отметим точку E так, что $\angle 1 = \angle 2$.

   $\angle 3 = \angle 4$ (как вписанные, опирающиеся на одну и ту же дугу)

   Значит, $\Delta ABE \sim \Delta DBC$ (по двум углам) $\Rightarrow \dfrac{AB}{BD} = \dfrac{AE}{DC}$; $AB \cdot CD = AE \cdot BD$ (1)

2. Так как $\angle 1 = \angle 2$, то $\angle ABD = \angle CBE$

   $\angle 5 = \angle 6$ (как вписанные, опирающиеся на одну и ту же дугу)

   $\Delta CBE \sim \Delta DBA \Rightarrow \dfrac{BC}{BD} = \dfrac{CE}{AD}$; $BC \cdot AD = CE \cdot BD$ (2)

   Сложим (1) и (2): $AB \cdot CD + BC \cdot AD = AE \cdot BD + CE \cdot BD$;

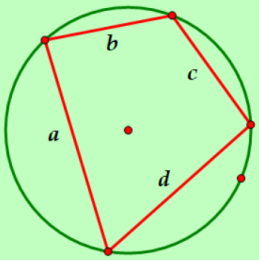
   $AB \cdot CD + BC \cdot AD = BD \cdot (AE + CE)$;

   $$\boxed{AB \cdot CD + BC \cdot AD = BD \cdot AC}$$

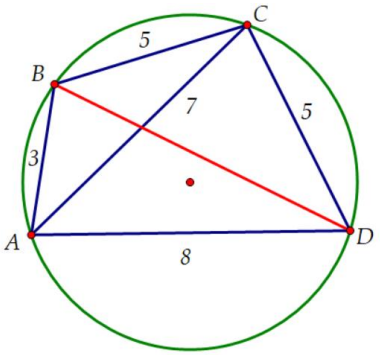
5. *Формула Брахмагупты*

Площадь вписанного четырехугольника со сторонами a, b, c, d: $S = \sqrt{(p - a)(p - b)(p - c)(p - d)}$

где p - полупериметр четырехугольника



11.47.1. Дан выпуклый четырёхугольник $ABCD$ со сторонами $AB = 3$, $BC = CD = 5$, $AD = 8$ и диагональю $AC = 7$.
а) Докажите, что около него можно описать окружность.
б) Найдите диагональ BD.



а) По теореме косинусов из ΔABC и ΔADC:

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2 \cdot AB \cdot BC \cdot \cos\angle ABC$$

$$AC^2 = AD^2 + DC^2 - 2 \cdot AD \cdot DC \cdot \cos\angle ADC$$

$$\cos\angle ABC = \frac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2 \cdot AB \cdot BC} = \frac{9 + 25 - 49}{30} = -\frac{1}{2}; \quad \angle ABC = 120^\circ$$

$$\cos\angle ADC = \frac{AD^2 + DC^2 - AC^2}{2 \cdot AD \cdot DC} = \frac{64 + 25 - 49}{80} = \frac{1}{2}; \quad \angle ADC = 60^\circ$$

$\angle ABC + \angle ADC = 180^\circ \Rightarrow$ *около четырехугольника ABCD можно описать окружность.*

б) Пусть $\angle BAD = \alpha$, тогда по свойству вписанного четырехугольника $\angle BCD = 180 - \alpha$

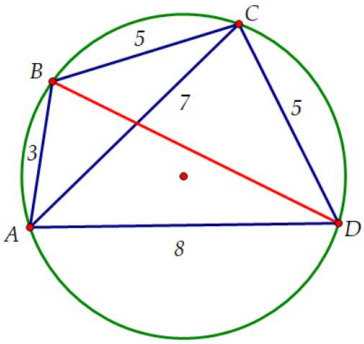
По теореме косинусов: $BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2 \cdot AB \cdot AD \cdot \cos\alpha = 73 - 48\cos\alpha$

$$BD^2 = BC^2 + CD^2 - 2 \cdot BC \cdot CD \cdot \cos(180 - \alpha) = 50 + 50\cos\alpha$$

$$73 - 48\cos\alpha = 50 + 50\cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha = \frac{23}{98}; \quad BD = \sqrt{50 + 50\cos\alpha} = \sqrt{50 + \frac{50 \cdot 23}{98}} = \sqrt{\frac{50 \cdot 121}{98}} = \frac{55}{7}.$$

Ответ: *б)* $\frac{55}{7}$

11.47.1. Дан выпуклый четырёхугольник $ABCD$ со сторонами $AB = 3$, $BC = CD = 5$, $AD = 8$ и диагональю $AC = 7$.
а) Докажите, что около него можно описать окружность.
б) Найдите диагональ BD.



а) По теореме косинусов из ΔABC и ΔADC:

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2 \cdot AB \cdot BC \cdot \cos\angle ABC$$

$$AC^2 = AD^2 + DC^2 - 2 \cdot AD \cdot DC \cdot \cos\angle ADC$$

$$\cos\angle ABC = \frac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2 \cdot AB \cdot BC} = \frac{9 + 25 - 49}{30} = -\frac{1}{2}; \quad \angle ABC = 120^\circ$$

$$\cos\angle ADC = \frac{AD^2 + DC^2 - AC^2}{2 \cdot AD \cdot DC} = \frac{64 + 25 - 49}{80} = \frac{1}{2}; \quad \angle ADC = 60^\circ$$

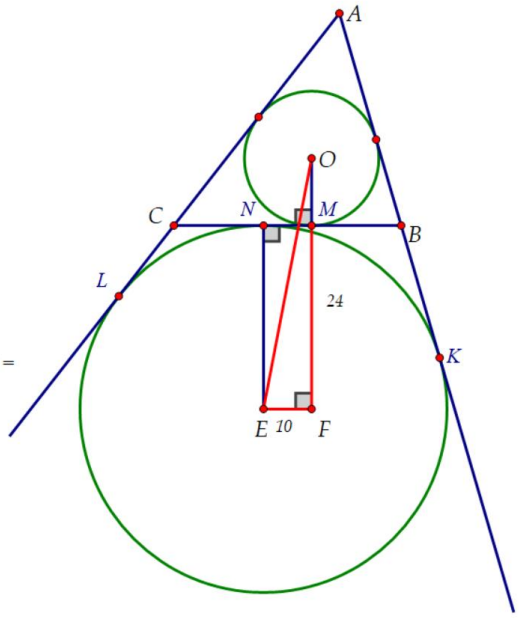
$\angle ABC + \angle ADC = 180^\circ \Rightarrow$ *около четырехугольника ABCD можно описать окружность.*

б) Поскольку ABCD вписанный четырехугольник, то по теореме Птолемея имеем: $AC \cdot BD = AB \cdot CD + BC \cdot AD$

$$7 \cdot BD = 3 \cdot 5 + 5 \cdot 8$$

Теорема Птолемея. ***Произведение диагоналей вписанного четырехугольника равно сумме произведений его противоположных сторон***

11.48.1. Сторона AC треугольника ABC больше стороны AB. Вписанная в треугольник окружность касается стороны BC в точке M, а вневписанная — в точке N.
а) Докажите, что $MN = AC - AB$.
б) Найдите расстояние между центрами окружностей, если сумма их радиусов равна 24, а $MN = 10$.



а) $CN = CL$, $BN = BK$, $AL = AK$ *(как отрезки касательных)*

$$AL + AK = AC + CL + AB + BK = AC + CN + AB + BN = P_{\Delta ABC}$$

$2AL = P_{\Delta ABC}$; $AL = p$, *где p - полупериметр* ΔABC

$CN = CL = AL - AC = p - AC$; $BM = p - AC$;

Тогда: $MN = BC - CN - BM = BC - p + AC - p + AC = BC + 2AC - 2p =$
$= BC + 2AC - AC - BC - AB = AC - AB$

б) $OM \parallel NE$ *(т.к.* $OM \perp BC$ *и* $NE \perp BC$*)*

$EF \parallel BC$, $OM \cap EF = F$; $NMFE$ *- прямоугольник;*

$OF = OM + MF = OM + NE = 24$; $EF = MN = 10$;

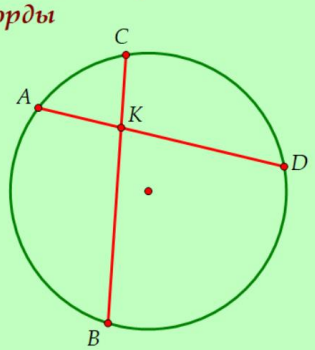
Из прямоугольного ΔEOF: $EO = \sqrt{24^2 + 10^2} = 26$.

Ответ: б) 26.

Тема 11. Пропорциональные отрезки в окружности

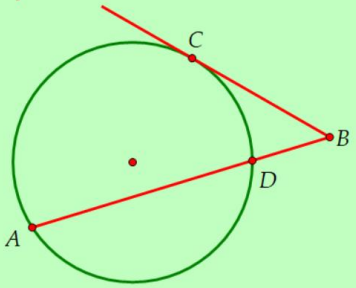
Полезные факты

1. *Теорема о произведении отрезков пересекающихся хорд. Если две хорды окружности пересекаются, то произведение отрезков одной хорды равно произведению отрезков другой хорды*



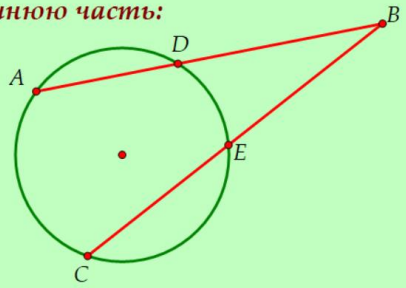
$$AK \cdot KD = CK \cdot KB$$

2. *Теорема о касательной и секущей. Если из одной точки к окружности проведены секущая и касательная, то произведение всей секущей на ее внешнюю часть равно квадрату отрезка касательной.*



$$BC^2 = AB \cdot BD$$

3. *Теорема о секущих. Если из точки, лежащей вне окружности, проведены две секущие, то произведение одной секущей на ее внешнюю часть равно произведению другой секущей на её внешнюю часть:*

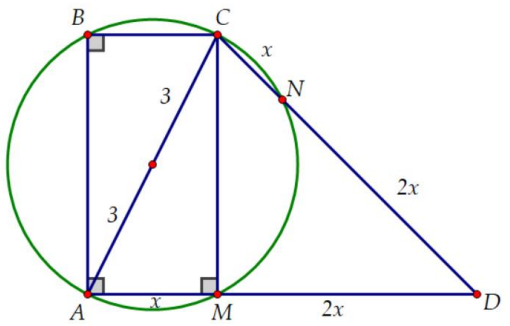


$$AB \cdot BD = BC \cdot BE$$

12.40.1. Окружность, проходящая через вершины A, B и C прямоугольной трапеции $ABCD$ с прямыми углами при вершинах A и B, пересекает отрезки AD и CD соответственно в точках M и N, причём $AM : AD = CN : CD = 1 : 3$.

а) Докажите, что $CD = AD$.

б) Найдите площадь трапеции, если радиус окружности равен 3.



а) По теореме о секущих: $AD \cdot MD = CD \cdot ND$

Пусть $AM = x$, $CN = y$, тогда $MD = 2x$, $ND = 2y$.

$3x \cdot 2x = 3y \cdot 2y$; $x^2 = y^2$; $x = y \Rightarrow CD = AD$.

б) AC - диаметр окружности ($\angle ABC = 90°$); $AC = 2 \cdot 3 = 6$;

$\angle AMC = 90°$ (вписанный, опирается на диаметр)

Из прямоугольного ΔACM: $CM^2 = AC^2 - AM^2 = 36 - x^2$;

Из прямоугольного ΔDCM: $CM^2 = CD^2 - MD^2 = 9x^2 - 4x^2 = 5x^2$;

$36 - x^2 = 5x^2$; $x = \sqrt{6}$; $AD = 3\sqrt{6}$; $BC = AM = \sqrt{6}$; $CM = \sqrt{30}$.

$$S_{ABCD} = \frac{AD + BC}{2} \cdot CM = \frac{3\sqrt{6} + \sqrt{6}}{2} \cdot \sqrt{30} = 2\sqrt{6} \cdot \sqrt{30} = 12\sqrt{5}.$$

Ответ: б) $12\sqrt{5}$

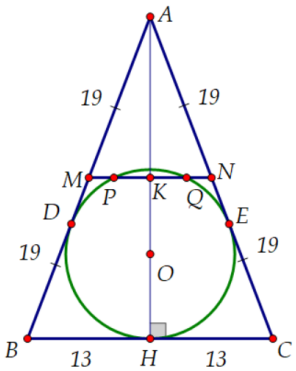
Теорема о двух секущих

Если из точки, лежащей вне окружности, проведены две секущие, то произведение одной секущей на ее внешнюю часть равно произведению другой секущей на её внешнюю часть.

12.41.1. Основание и боковая сторона равнобедренного треугольника равны 26 и 38 соответственно.

а) Докажите, что средняя линия треугольника, параллельная основанию, пересекает окружность, вписанную в треугольник.

б) Найдите длину отрезка этой средней линии, заключённого внутри окружности.



а) Пусть $AB = AC = 38$, $BC = 26$; M, N - середины AB и AC соответственно.

r - центр вписанной окружности, AH - высота ΔABC; p - полупериметр ΔABC;

$AH \cap MN = K$; MN - средняя линия $\Rightarrow K$ - общая середина AH и MN

Из прямоугольного ΔACH: $AH = \sqrt{AC^2 - CH^2} = \sqrt{38^2 - 13^2} = 5\sqrt{51}$; $KH = 0{,}5AH = \frac{5\sqrt{51}}{2}$;

$$r = \frac{S_{\Delta ABC}}{p} = \frac{0{,}5 \cdot AH \cdot BC}{AB + BH} = \frac{0{,}5 \cdot 5\sqrt{51} \cdot 26}{51} = \frac{65\sqrt{51}}{51}; \; 2r = \frac{130\sqrt{51}}{51};$$

Сравним значения $2r$ и KH: $\frac{130\sqrt{51}}{51} \vee \frac{5\sqrt{51}}{2}$; $\frac{130}{51} \vee \frac{5}{2}$; $52 > 51$ $\Rightarrow \frac{130\sqrt{51}}{51} > \frac{5\sqrt{51}}{2}$;

$2r > KH \Rightarrow$ средняя линия пересекает вписанную окружность.

б) $BD = p - AC = 51 - 38 = 13$; $MD = BM - BD = 19 - 13 = 6$;

По теореме о касательной и секущей: $MD^2 = MP \cdot MQ$; $MP = NQ = \frac{MN - PQ}{2} = \frac{13 - PQ}{2}$;

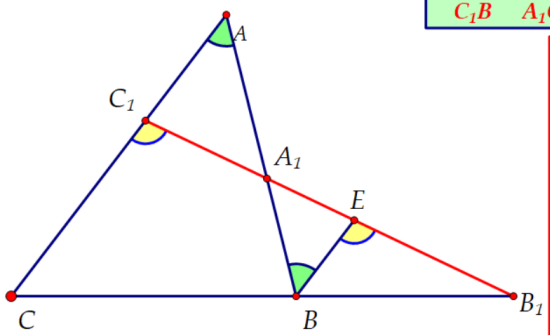
$MQ = MP + PQ = \frac{13 - PQ}{2} + PQ = \frac{13 + PQ}{2}$. Получим уравнение: $36 = \frac{13 - PQ}{2} \cdot \frac{13 + PQ}{2} \Rightarrow PQ = 5$.

Ответ: б) 5

1. Теорема Менелая.

Пусть на сторонах AB, BC и продолжении стороны AC треугольника ABC взяты соответственно точки C_1, A_1 и B_1. Точки A_1, B_1, C_1 лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда выполняется равенство:

$$\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1$$



Доказательство:

$CE \parallel AB$ (по построению)

$$\Delta AC_1B_1 \sim \Delta CEB_1 \Rightarrow \frac{AC_1}{CE} = \frac{B_1A}{CB_1} \Rightarrow CE = \frac{AC_1 \cdot CB_1}{B_1A} \quad (1)$$

$$\Delta C_1BA_1 \sim \Delta ECA_1 \Rightarrow \frac{C_1B}{CE} = \frac{BA_1}{A_1C} \Rightarrow CE = \frac{C_1B \cdot A_1C}{BA_1} \quad (2)$$

Приравнивая (1) и (2), получим:

$$\frac{AC_1 \cdot CB_1}{B_1A} = \frac{C_1B \cdot A_1C}{BA_1} \quad \textbf{Отсюда:} \quad \frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1$$

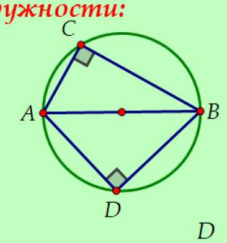
Тема 12. Метод вспомогательной окружности. Некоторые свойства высот и точки их пересечения

Полезные факты

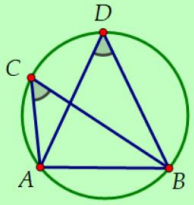
1. *Теорема: Угол между касательной и хордой равен половине угловой величины дуги, заключенной между ними*

2. *Критерии принадлежности четырех точек одной окружности:*

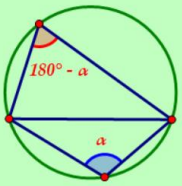
- из точек C и D отрезок AB виден под прямым углом



- из точек C и D, лежащих по одну сторону от прямой AB, отрезок AB виден под одним и тем же углом

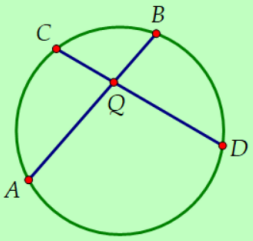


- из точек C и D, лежащих по разные стороны от прямой AB, отрезок AB виден под углами, сумма которых равна 180°



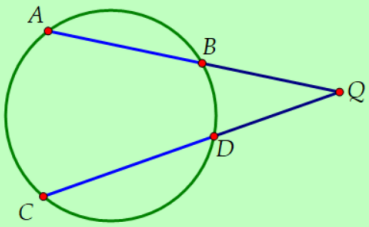
- отрезки AB и CD пересекаются в точке O, причем:

$$AQ \cdot QB = CQ \cdot QD$$



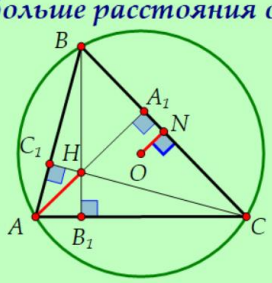
- продолжения отрезков AB и CD пересекаются в точке Q, причем:

$$AQ \cdot QB = CQ \cdot QD$$



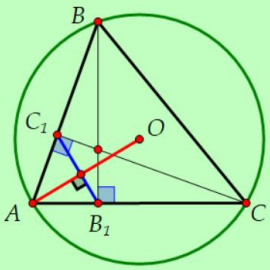
3. *Некоторые свойства ортоцентра*

- Если H - точка пересечения высот ΔABC, а O - центр его описанной окружности, то отрезок AH вдвое больше расстояния от точки O до середины стороны BC

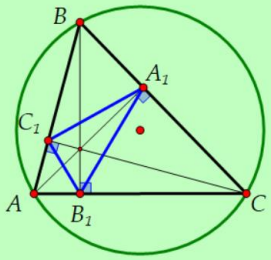


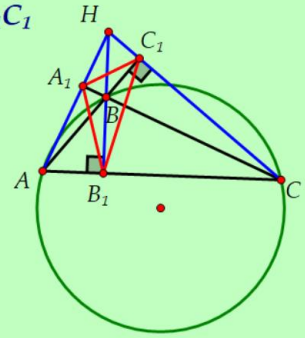
$$AH = 2 \cdot ON$$

- Если BB_1 и CC_1 - высоты ΔABC, а O - центр описанной окужности, то $OA \perp B_1C_1$



- Если AA_1, BB_1 и CC_1 - высоты остроугольного ΔABC, то биссектрисы $\Delta A_1B_1C_1$ лежат на прямых AA_1, BB_1 и CC_1. Если же ΔABC тупоугольный, то на этих прямых лежат биссектрисы двух внешних и третьего внутреннего углов $\Delta A_1B_1C_1$

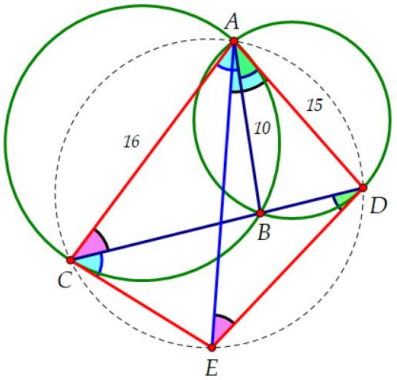




13.43.1. Две окружности пересекаются в точках A и B. Через точку B проведена прямая, пересекающая окружности в точках C и D, лежащих по разные стороны от прямой AB. Касательные к этим окружностям в точках C и D пересекаются в точке E.

а) Докажите, что четырёхугольник $ACED$ вписанный.

б) Найдите AE, если $AB = 10$, $AC = 16$, $AD = 15$.



а) $\angle ECD = 0{,}5\overset{\frown}{CB}$ (угол между касательной CE и хордой CB)

$\angle CAB = 0{,}5\overset{\frown}{CB}$ (вписанный угол, опирается на дугу $\overset{\frown}{CB}$)

$\Rightarrow \angle ECD = \angle CAB$

Аналогично: $\angle BAD = \angle EDC$

Тогда $\angle CAD = \angle CAB + \angle BAD = \angle ECD + \angle EDC = 180° - \angle CED$

$\Rightarrow$ около четырехугольника ACED можно описать окружность

б) Рассмотрим ΔABC и ΔADE.

$\angle ACB = \angle AED$ (как вписанные углы, опирающиеся на одну дугу)

$\angle DAE = \angle DCE = \angle CAB$

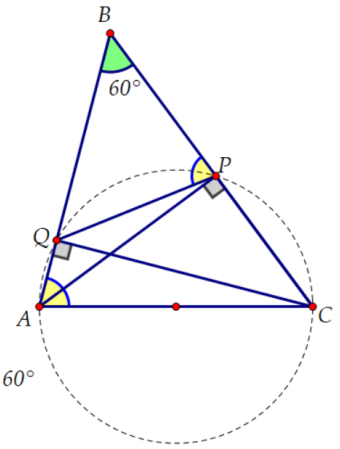
$\Delta ABC \sim \Delta ADE$ (по двум углам) $\Rightarrow \dfrac{AB}{AD} = \dfrac{AC}{AE} \Rightarrow \dfrac{10}{15} = \dfrac{16}{AE} \Rightarrow AE = 24$

Ответ: б) 24

13.44.1. В остроугольном треугольнике ABC из вершин A и C опущены высоты AP и CQ на стороны BC и AB.

а) Докажите, что $\angle BPQ = \angle BAC$.

б) Известно, что площадь треугольника ABC равна 96, площадь четырёхугольника $AQPC$ равна 72, а радиус окружности, описанной около треугольника ABC, равен $\frac{16}{\sqrt{3}}$. Найдите PQ.



а) Из точек P и Q отрезок AC виден под прямым углом,

$\Rightarrow$ точки P, Q, A, C лежат на одной окружности с диаметром AC

AQPC - вписанный четырехугольник $\Rightarrow \angle BPQ = 180° - \angle QPC = \angle QAC = \angle BAC$

б) $S_{\Delta BPQ} = S_{\Delta ABC} - S_{\Delta AQPC} = 96 - 72 = 24;$

$\Delta BPQ \sim \Delta BAC$ *(по двум углам)* $\Rightarrow \frac{S_{\Delta BPQ}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{24}{96} = \frac{1}{4}; \quad k = \frac{BQ}{BC} = \cos\angle QBC = \frac{1}{2} \Rightarrow \angle QBC = 60°$

Пусть R - радиус окружности, описанной около ΔABC

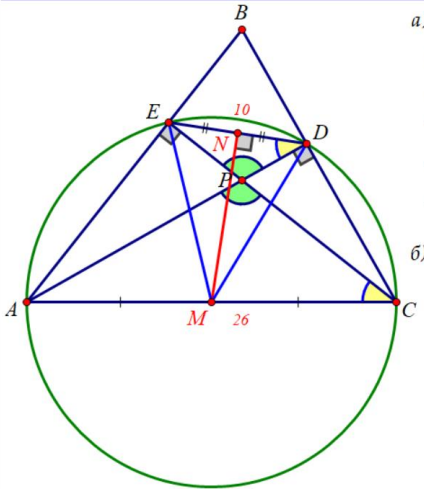
По теореме синусов: $\frac{AC}{\sin 60°} = 2R \Rightarrow AC = 2R\sin 60° = 2 \cdot \frac{16}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 16 \Rightarrow PQ = \frac{1}{2}AC = 8.$

***Ответ:** б) 8*

16. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AD и CE, пересекающиеся в точке P. Известно, что AC=26, DE=10

а) Найдите отношение радиусов окружностей, вписанных в треугольники DEP и ACP

б) Найдите расстояние между серединами отрезков AC и DE.



а) Пусть r_1 и r_2 - радиусы окружностей, вписанных в ΔDEP и ΔACP соответственно.

Из точек E и D отрезок AC виден под углом 90° $\Rightarrow$ точки A, E, D, C лежат на одной окружности с диаметром AC.

$\angle ADE = \angle ACE$ (как вписанные углы, опирающиеся на одну и туже дугу $\overset{\frown}{AE}$)

$\angle DPE = \angle APC$ (как вертикальные)

$\Delta DPE \sim \Delta CPA$ (по двум углам) $\Rightarrow \frac{r_1}{r_2} = \frac{ED}{AC} = \frac{10}{26} = \frac{5}{13}.$

б) Пусть M, N - середины AC и ED соответственно, тогда MN - искомое расстояние

ME=MD=AM=0,5AC=13 (как радиусы)

ΔDME - равнобедренный, MN - медиана и высота; ND=0,5ED=5

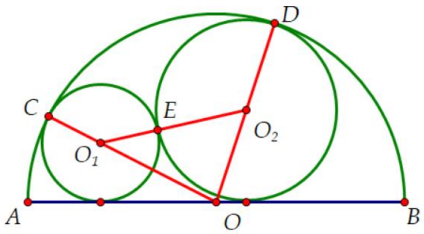
Из прямоугольного ΔMND: $MN = \sqrt{MD^2 - ND^2} = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12.$

ОТВЕТ: а) 5/13; б) 12.

9.54.1. В полуокружности расположены две окружности, касающиеся друг друга, полуокружности и её диаметра.

а) Докажите, что периметр треугольника с вершинами в центрах окружностей и полуокружности равен диаметру полуокружности.

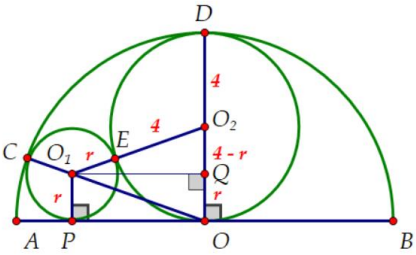
б) Известно, что радиус полуокружности равен 8, а радиус одной из окружностей равен 4. Найдите радиус другой.



а) AB - диаметр полуокружности; O_1 - центр окружности радиуса r, O_2 - центр окружности радиуса R

O, O_1, C лежат на одной прямой $\Rightarrow OO_1 = OC - O_1C = OC - r$; $OO_2 = OD - O_2D = OD - R$ (аналогично); $O_1O_2 = r + R$;

$P_{\Delta OO_1O_2} = OO_1 + OO_2 + O_1O_2 = OC - r + OD - R + r + R = OC + OD = 2OC = AB$.



б) $R = 4$, $OC = OD = 8$; $O_1Q \perp OD$ (по построению)

$O_1P = r$; $O_1O_2 = r + 4$; $O_2Q = OO_2 - OQ = 4 - r$; $OO_1 = OC - r = 8 - r$;

Из ΔOPO_1: $OP^2 = (8 - r)^2 - r^2 = 64 - 16r$;

Из ΔQO_1O_2: $O_1Q^2 = (4 + r)^2 - (4 - r)^2 = 16r$;

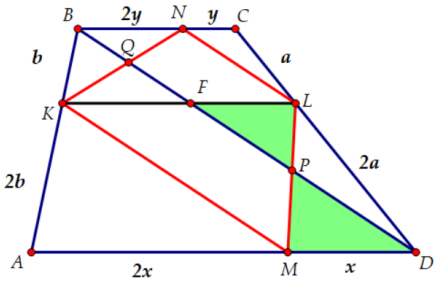
$OP = O_1Q \Rightarrow 64 - 16r = 16r \Rightarrow r = 2$.

Ответ: б) 2

6.27.1. На основаниях AD и BC трапеции $ABCD$ отмечены точки M и N соответственно, а на боковых сторонах AB и CD — точки K и L соответственно. При этом $DM : AM = CN : BN = BK : AK = CL : LD = 1 : 2$.

а) Докажите, что четырёхугольник $KMLN$ — трапеция.

б) Известно, что $AD = 3BC$. В каком отношении диагональ BD трапеции $ABCD$ делит боковые стороны трапеции $KMLN$?



а) $\left.\begin{array}{l} CN : CB = CL : CD \Rightarrow NL \parallel BD \\ AK : AB = AM : AD \Rightarrow KM \parallel BD \end{array}\right\} \Rightarrow NL \parallel KM$

$\Delta CNL \sim \Delta CBD \Rightarrow NL = \frac{1}{3}BD$; $\Delta AKM \sim \Delta ABD \Rightarrow KM = \frac{2}{3}BD$; $NL \neq KM$

$\Rightarrow KMLN$ - трапеция.

б) $BD \cap KN = Q$, $BD \cap LM = P$; $KL \cap BD = F$;

$AK : KB = DL : LC = 2 : 1 \Rightarrow KL \parallel AD$

$\Delta FDL \sim \Delta BDC \Rightarrow FL = \frac{2}{3}BC$; $MD = \frac{1}{3}AD = \frac{1}{3} \cdot 3BC = BC$

$\Delta FPL \sim \Delta DPM \Rightarrow LP : PM = FL : MD = 2 : 3$

Так как $KM \parallel BD$, то $NQ : QK = LP : PM = 2 : 3$.

Ответ: б) 2 : 3